Διάλεξη 9η

05/11/2018

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$(E): y' = f(t,y)$$
$$(C): y(t_0) = y_0 \qquad \text{Π.Α.Τ.}$$

Θεώρημα 1) Ας είναι $f: \Omega \to \mathbb{R}$ συνεχής στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ και $a, b > 0$ με $R = \{(t,y) : |t - t_0| \le a, |y - y_0| \le b\} \subseteq \Omega$. Υποθέτουμε ότι $\exists\, K > 0 : \underline{|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le K|y_1 - y_2|}$, $(t,y_1), (t,y_2) \in R$, τότε το Π.Α.Τ. (E)-(C) έχει ακριβώς μία λύση στο $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ με $r = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, με $M = \sup_{\Omega} |f(t,y)|$ $\left\{ \begin{matrix} \text{αν } M = 0 \\ a = r \end{matrix} \right\}$

Επιπλέον η λύση y είναι όριο της ακολουθίας συναρτήσεων (ϕ_ν) με $\phi_0(t) = y_0$.

$$\phi_{\nu+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_\nu(s))\, ds, \quad t \in I$$

Επίσης ισχύει ότι: $|y(t) - \phi_\nu(t)| \le \frac{M}{K} \frac{(Kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{Kr}$, $t \in I$.

Παράδειγμα 3)

Ν.δ.ο.: το Πρ. Αρχ. Τιμών : $y' = x + y^2$, $y(0) = 2$ έχει ακριβώς μία λύση στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ και να βρεθεί μια προσέγγιση $\frac{1}{10}$ της λύσης στο I.

Λύση

$f(x,y) = x + y^2$, $a, b > 0$ // $f: \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}_{\text{I}} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$R = \{(x,y) : |x - 0| \le a, |y - 2| \le b\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2|y| \le \underbrace{2b = K}$$

και έτσι έχω μια σταθερά K για να ικανοποιείται την συνθήκη Lipschitz.

$r=\min\left\{a, \frac{b}{m}\right\}$, $m=\max\limits_{R}|f(x,y)| = \max\limits_{R}|x^2+y^2|$.

$$|x^2+y^2| \le |x| + y^2 \le a+b^2, \quad (x,y)\in R$$

$$r=\min\left\{a, \frac{b}{a+b^2}\right\}$$

αυτό επιτυγχάνεται αν θέσω $\boxed{\sqrt{a}=b}$

Μπορώ να γράψω ότι

$$a+b^2 = \sqrt{a}^2+b^2 \geq 2\sqrt{a}\,b$$

Έτσι το κλάσμα γίνεται:

$$\frac{b}{a+b^2} \le \frac{\cancel{b}}{2\sqrt{a}\,\cancel{b}}$$

Αν θέσω $a=\frac{1}{2\sqrt{a}} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2^{2/3}}}$

Έτσι έχω τα a, b

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{a=\frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \frac{1}{2}}$$

Είναι μεγαλύτερο από το διάστημα που είχα, οπότε έχω μια καλύτερη προσέγγιση//

Β' τρόπος: (με βάση το βιβλίο)

Θέτω $r=\min\left\{a, \frac{b}{a+b^2}\right\}=\frac{1}{2}$.

Αν $a=\frac{1}{2}$, τότε θα πρέπει $\frac{b}{\frac{1}{2}+b^2} \geq \frac{1}{2}$.

$$2b \geq \frac{1}{2}+b^2 \Rightarrow b^2-2b+\frac{1}{2} \le 0$$

$$b_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-2}}{2} = 1\pm\sqrt{2}.$$

$1-\sqrt{2}$ $\quad b \quad$ $1+\sqrt{2}$

$$\boxed{b=1}$$

$K = 2b$ $= 2$, $b = 1$, $a = \frac{1}{2}$

(3)

Θέλω λύση προσέγγιση στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$M = a + b^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

$$|y(x) - \phi_\nu(x)| \leq \frac{M}{2} \frac{(kr)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{kr}$$

$$= \frac{3/2}{2} \frac{(2 \cdot 1/2)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} e^{2 \cdot 1/2}$$

$$= \frac{3}{4} \frac{1}{(\nu+1)!} e < \frac{1}{10}$$

Έχω ότι $\frac{1}{(\nu+1)!} < \frac{1}{10} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3 \cdot 5}$

Θα δίνω διάφορες τιμές στο ν για να ικανοποιείται στο ζητούμενο

Σημείωση Θα μεγαλώνω το $\frac{1}{(\nu+1)!}$ ως εξής:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \nu(\nu+1)} < \frac{2}{3 \cdot 5}$$ Για $\nu = 2$ έχω το ζητούμενο

Τώρα $\phi_0(x) = 2$.

$$\phi_1(x) = 2 + \int_{x_0}^{x} (s + \phi_0^2(s))\, ds = 2 + \int_{x_0}^{x} (s + 2^2)\, ds = \dots$$

$$\phi_2(x) = 2 + \int_{x_0}^{x} [s + \phi_0^2(s)]\, ds = \dots \quad x \in [-1/2, 1/2]$$

Θεώρημα 2: Ας είναι $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\alpha, b > 0$ με $S = \{(t,y) : |t - t_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq b\} \subseteq D_f$

Υποθέτω ότι $\exists k > 0 : |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$, $(t,y_1),(t,y_2) \in S$. Τότε το Π.Α.Τ. (Ε)-(C) έχει ακριβώς μία λύση στο $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ με $r = \alpha$, $I = [-\alpha, \alpha]$, $M = \sup_{t \in I} |f(t, y_0)|$

Επιπλέον η λύση y είναι το όριο ακολουθίας συναρτήσεων (ϕ_ν) με $\phi_0(t) = y_0$

$$\phi_{\nu+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_\nu(s))\, ds \quad , t \in I$$

Επίσης είναι: $|y(t) - \phi_\nu(t)| \leq \frac{M}{k} \frac{(k\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \cdot e^{k\alpha}$, $t \in I$

Θεώρημα 3: Ας είναι $f: D_f \to \mathbb{R}$ συνεχής στον τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\alpha, b > 0$ με $E = \{(t,y) : t \in I, y$ αυθαίρετο$\}$ I διάστημα του $\mathbb{R}$. Υποθέτω ότι f πληροί μία συνθήκη Lip: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$, $(t,y_1),(t,y_2) \in E_J = \{t \in J$ y αυθ.$\}$ όπου J συμπαγές υποδ. του I. Τότε το Π.Α.Τ. (Ε)-(C) έχει ακριβώς μία λύση στο $E_J = [t_0 - r, t_0 + r]$

Παράδειγμα 5)

$$y' = \underbrace{x^2 \operatorname{Arctan} y + e^{-x}}, \quad y(1) = -2.$$

$$f(x,y) = x^2 \operatorname{Arctan} y + e^{-x}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 = \underbrace{\mathbb{R}}_{J} \times \mathbb{R}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{1+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

αν J φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$ τότε $\exists r>0 : J \subseteq [-r,r]$

$$\sup_{E_J} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{r^2}{1+y^2} \leq r^2$$

Δηλαδή η $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ είναι φραγμένη σε κάθε σύνολο $E_J = J \times \mathbb{R}$ με J φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$.

Από το Θεωρ. 3 έπεται ότι το Π.Α.Τ. έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Ερώτημα: Για το Π.Α.Τ $y' = y^{1/3}$, $y(0)=0$ ισχύει το Θεωρ. 3; με $f(x,y) = y^{1/3}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

→ Το συγκεκριμένο Π.Α.Τ. έχει άπειρες λύσεις ενώ το Θ.3 αναφέρεται σε μία μοναδική λύση. Οπότε στο συγκεκριμένο Π.Α.Τ. μία από τις προϋποθέσεις του Θεωρ. 3 δεν θα ισχύει. Η $f(x,y) = y^{1/3}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής. Άρα πρέπει να βρω πού μπορεί να βρίσκεται το πρόβλημα. Υποψιάζομαι ότι μάλλον δεν ισχύει η συνθήκη Lipschitz.

→ Έστω ότι ισχύει. Τότε $J = [-r,r]\times\mathbb{R}$: $|f(0,y_1) - f(0,y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$, $\forall y_1, y_2 \in [-r,r]$

$$|y_1^{1/3}| \leq k|y_1|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{y^{-1/3}}\right| \leq k, \quad \forall y_1 \in [-r,r]$$

άτοπο, οπότε δεν ισχύει.